Matemáticas I
Sucesiones de números reales

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

May 29, 2014

Concepto de sucesión

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en $\mathbb{R}$.

Concepto de sucesión

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en $\mathbb{R}$.

Suele usarse la notación $\{x_n\}$ para representar la aplicación que al número natural $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n.

Concepto de sucesión

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en $\mathbb{R}$.

Suele usarse la notación $\{x_n\}$ para representar la aplicación que al número natural $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n.

Dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son iguales si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n = y_n$.

Concepto de sucesión

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en $\mathbb{R}$.

Suele usarse la notación $\{x_n\}$ para representar la aplicación que al número natural $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n.

Dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son iguales si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n = y_n$.

Es muy importante distinguir entre $\{x_n\}$, que es una aplicación, y los valores que dicha aplicación toma, es decir su conjunto imagen que es el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Concepto de sucesión

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en $\mathbb{R}$.

Suele usarse la notación $\{x_n\}$ para representar la aplicación que al número natural $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n.

Dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son iguales si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n = y_n$.

Es muy importante distinguir entre $\{x_n\}$, que es una aplicación, y los valores que dicha aplicación toma, es decir su conjunto imagen que es el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Por ejemplo, las sucesiones $\{(-1)^n\}$ y$\{(-1)^{n+1}\}$ toman los mismos valores 1 y -1 pero en la primera valen 1 en los lugares pares y -1 en los impares y al revés en la segunda: son sucesiones distintas.

Sucesiones convergentes

Sucesiones convergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **converge** a un número real x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon}$$

Sucesiones convergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **converge** a un número real x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon}$$

Se dice también que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$, y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Sucesiones convergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **converge** a un número real x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon}$$

Se dice también que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$, y se escribe $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Una sucesión convergente tiene un único límite.

Sucesiones convergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **converge** a un número real x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon}$$

Se dice también que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$, y se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Una sucesión convergente tiene un único límite.

Si cambiamos un número finito de términos de una sucesión, la nueva sucesión así obtenida es convergente si lo era la de partida y con su mismo límite.

Sucesiones convergentes y estructura de orden de $\mathbb{R}$

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se tiene que $x_n \leqslant y_n$. Entonces se verifica que $x \leqslant y$.

Sucesiones convergentes y estructura de orden de $\mathbb{R}$

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se tiene que $x_n \leqslant y_n$. Entonces se verifica que $x \leqslant y$.

Principio de las sucesiones encajadas. Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones tales que $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ y existe un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

entonces se verifica que $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:
- Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:
- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:
- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:
- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:
- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente decreciente** si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:
- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente decreciente** si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Monótona** si es creciente o decreciente.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:
- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente decreciente** si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Monótona** si es creciente o decreciente.
- **Estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o decreciente.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente decreciente** si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Monótona** si es creciente o decreciente.
- **Estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o decreciente.

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

i) Creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$, donde

$$\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

i) Creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$, donde

$$\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

ii) Decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$, donde

$$\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sucesiones parciales

Sea $\{x_n\}$ una sucesión; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** o una **subsucesión** de $\{x_n\}$.

Sucesiones parciales

Sea $\{x_n\}$ una sucesión; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** o una **subsucesión** de $\{x_n\}$.

Observa que $\{x_{\sigma(n)}\}$ no es otra cosa que la composición de las aplicaciones $\{x_n\}$ y σ, esto es, $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_n\} \circ \sigma$.

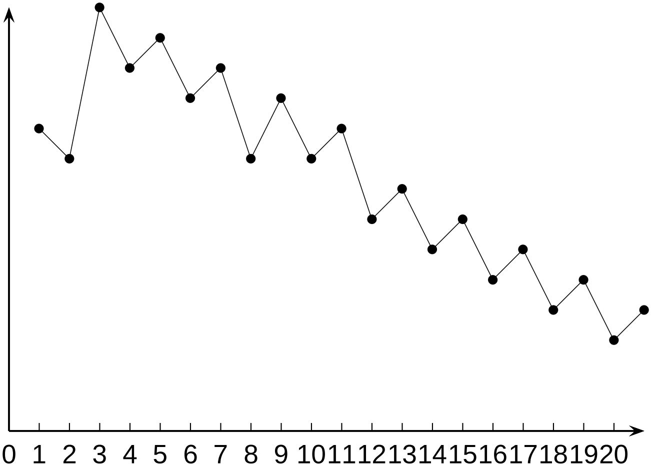
Sucesiones parciales

Sea $\{x_n\}$ una sucesión; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** o una **subsucesión** de $\{x_n\}$.

Observa que $\{x_{\sigma(n)}\}$ no es otra cosa que la composición de las aplicaciones $\{x_n\}$ y σ, esto es, $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_n\} \circ \sigma$.

Si $\lim\{x_n\} = x$, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ también converge a x.

Toda sucesión de números reales tiene una sucesión parcial monótona.



Teorema de Bolzano - Weierstrass

Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna sucesión parcial convergente.

Teorema de complitud de $\mathbb{R}$

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la **condición de Cauchy**, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

Teorema de complitud de $\mathbb{R}$

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la **condición de Cauchy**, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.

Sucesiones convergentes y estructura algebraica de $\mathbb{R}$

Sucesiones convergentes y estructura algebraica de $\mathbb{R}$

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

Sucesiones convergentes y estructura algebraica de $\mathbb{R}$

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.

Sucesiones convergentes y estructura algebraica de $\mathbb{R}$

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ y $\lim\{y_n\} = y$. Entonces se verifica que:

$$\lim\{x_n + y_n\} = x + y, \quad \lim\{x_n y_n\} = xy\,.$$

Si además suponemos que $y \neq 0$, entonces $\lim\{x_n/y_n\} = x/y$.

Sucesiones divergentes

Sucesiones divergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Sucesiones divergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Positivamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

Sucesiones divergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Positivamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

Negativamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, si para todo número real $K < 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \leqslant K$.

Sucesiones divergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Positivamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

Negativamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, si para todo número real $K < 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \leqslant K$.

Diremos que una sucesión es **divergente** para indicar que es positivamente o negativamente divergente.

Propiedades de las sucesiones divergentes

Propiedades de las sucesiones divergentes

$\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.

Propiedades de las sucesiones divergentes

$\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.

La suma de una sucesión divergente con una sucesión acotada es una sucesión divergente del mismo tipo.

Propiedades de las sucesiones divergentes

$\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.

La suma de una sucesión divergente con una sucesión acotada es una sucesión divergente del mismo tipo.

La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

Propiedades de las sucesiones divergentes

$\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.

La suma de una sucesión divergente con una sucesión acotada es una sucesión divergente del mismo tipo.

La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

El producto de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

Propiedades de las sucesiones divergentes

$\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.

La suma de una sucesión divergente con una sucesión acotada es una sucesión divergente del mismo tipo.

La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

El producto de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

El producto de una sucesión positivamente divergente por una sucesión que converge a un número positivo es otra sucesión positivamente divergente.

Sucesiones asintóticamente equivalentes

Diremos que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sucesiones asintóticamente equivalentes

Diremos que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:

Sucesiones asintóticamente equivalentes

Diremos que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:

- $\{x_n z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.

Sucesiones asintóticamente equivalentes

Diremos que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:

- $\{x_n z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.
- $\{x_n z_n\}$ es divergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es divergente, en cuyo caso ambas sucesiones son divergentes del mismo tipo.

Sucesiones asintóticamente equivalentes

Diremos que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:

- $\{x_n z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.
- $\{x_n z_n\}$ es divergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es divergente, en cuyo caso ambas sucesiones son divergentes del mismo tipo.
- En particular, $\{x_n\}$ es convergente (resp. divergente) si, y sólo si, $\{y_n\}$ es convergente (resp. divergente), en cuyo caso ambas tienen igual límite (resp. son divergentes del mismo tipo).

Indeterminaciones

Si $\{x_n\} \to +\infty$ y $\{y_n\} \to -\infty$ ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n + y_n\}$ la cual se dice que es **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Indeterminaciones

Si $\{x_n\} \to +\infty$ y $\{y_n\} \to -\infty$ ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n + y_n\}$ la cual se dice que es **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Si $\{x_n\} \to 0$ y $\{y_n\}$ es divergente, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n y_n\}$; la cual se dice que es **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$".

Indeterminaciones

Si $\{x_n\} \to +\infty$ y $\{y_n\} \to -\infty$ ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n + y_n\}$ la cual se dice que es **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Si $\{x_n\} \to 0$ y $\{y_n\}$ es divergente, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n y_n\}$; la cual se dice que es **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$".

El cociente de dos sucesiones divergentes o de dos sucesiones que convergen a cero da lugar a las indeterminaciones de los tipos "∞/∞", "$0/0$".

El siguiente criterio resuelve a veces la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$.

El siguiente criterio resuelve a veces la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Criterio de Stolz

El siguiente criterio resuelve a veces la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Criterio de Stolz

Sean $\{y_n\}$ estrictamente creciente con $\{y_n\} \to +\infty$ y $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que

$$\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\} \to L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Entonces se verifica también que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} \to L$.

El siguiente criterio resuelve a veces la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Criterio de Stolz

Sean $\{y_n\}$ estrictamente creciente con $\{y_n\} \to +\infty$ y $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que

$$\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right\} \to L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Entonces se verifica también que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} \to L$.

Criterio de la media aritmética

El siguiente criterio resuelve a veces la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Criterio de Stolz

Sean $\{y_n\}$ estrictamente creciente con $\{y_n\} \to +\infty$ y $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que

$$\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right\} \to L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Entonces se verifica también que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} \to L$.

Criterio de la media aritmética

Supongamos que $\{a_n\} \to L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Entonces se verifica que

$$\left\{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right\} \to L.$$

Continuidad y sucesiones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones:

Continuidad y sucesiones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones:

- f es continua en a.

Continuidad y sucesiones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones:

- f es continua en a.
- Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de I tal que $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Continuidad y sucesiones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones:

- f es continua en a.
- Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de I tal que $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Continuidad y sucesiones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones:

- f es continua en a.
- Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de I tal que $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Podemos expresar este resultado como sigue: *la continuidad permuta con el límite secuencial*, esto es, si f es continua entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)$$

Continuidad y sucesiones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones:

- f es continua en a.
- Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de I tal que $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Podemos expresar este resultado como sigue: *la continuidad permuta con el límite secuencial*, esto es, si f es continua entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)$$

Sucesiones y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:

Continuidad y sucesiones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones:

- f es continua en a.
- Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de I tal que $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Podemos expresar este resultado como sigue: *la continuidad permuta con el límite secuencial*, esto es, si f es continua entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)$$

Sucesiones y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Continuidad y sucesiones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones:

- f es continua en a.
- Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de I tal que $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Podemos expresar este resultado como sigue: *la continuidad permuta con el límite secuencial*, esto es, si f es continua entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)$$

Sucesiones y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:

- $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
- Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de I tal que $\{x_n\} \to a$ con $x_n \neq a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$.

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{e^{x_n}\} \to +\infty$.

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{e^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \iff \{e^{x_n}\} \to 0$.

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{e^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \iff \{e^{x_n}\} \to 0$.

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{e^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \iff \{e^{x_n}\} \to 0$.

Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{e^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \iff \{e^{x_n}\} \to 0$.

Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x > 0 \iff \{\log(x_n)\} \to \log x$.

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{e^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \iff \{e^{x_n}\} \to 0$.

Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x > 0 \iff \{\log(x_n)\} \to \log x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{\log(x_n)\} \to +\infty$.

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{e^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \iff \{e^{x_n}\} \to 0$.

Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x > 0 \iff \{\log(x_n)\} \to \log x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{\log(x_n)\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to 0 \iff \{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Criterio de la media geométrica

Criterio de la media geométrica

- Sea $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos tal que $\{a_n\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$. Entonces se verifica que

$$\left\{ \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \right\} \to L.$$

Criterio de la media geométrica

- Sea $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos tal que $\{a_n\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$. Entonces se verifica que

$$\left\{ \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \right\} \to L.$$

- Supongamos que $x_n > 0$ y $\left\{ \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$. Entonces se verifica que $\{ \sqrt[n]{x_n} \} \to L$.

El número e

La sucesión $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente.

El número e

La sucesión $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente.

La sucesión $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es estrictamente decreciente.

El número e

La sucesión $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente.

La sucesión $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es estrictamente decreciente.

Ambas sucesiones son convergentes y se verifica que:

El número e

La sucesión $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente.

La sucesión $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es estrictamente decreciente.

Ambas sucesiones son convergentes y se verifica que:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

El número e

La sucesión $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente.

La sucesión $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es estrictamente decreciente.

Ambas sucesiones son convergentes y se verifica que:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$$

En consecuencia, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

Sucesiones de potencias

$$x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$$

Es una indeterminación cuando $\{y_n \log(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre cuando:

Sucesiones de potencias

$$x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$$

Es una indeterminación cuando $\{y_n \log(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo “ $0\,\infty$”, lo que ocurre cuando:

- $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación “1^∞”)

Sucesiones de potencias

$$x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$$

Es una indeterminación cuando $\{y_n \log(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre cuando:

- $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación "1^∞")
- $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "∞^0")

Sucesiones de potencias

$$x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$$

Es una indeterminación cuando $\{y_n \log(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre cuando:

- $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación "1^∞")
- $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "∞^0")
- $\{x_n\} \to 0$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "0^0")

Criterio de equivalencia logarítmica

Permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “$0\,\infty$”.

Criterio de equivalencia logarítmica

Permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “$0\,\infty$”.

Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

Criterio de equivalencia logarítmica

Permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “$0\,\infty$”.

Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

- $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L \iff \lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.

Criterio de equivalencia logarítmica

Permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “$0\,\infty$”.

Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

- $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L \Longleftrightarrow \lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty \Longleftrightarrow \{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.

Criterio de equivalencia logarítmica

Permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “$0\,\infty$”.

Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

- $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L \iff \lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty \iff \{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to 0 \iff \{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$.

Límites frecuentes

Para toda sucesión $\{x_n\} \to 0$ se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arcsen} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \operatorname{sen} x_n}{(x_n)^3} = \frac{1}{6} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \alpha \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n - x_n}{(x_n)^3} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n) - x_n}{x_n^2} = \frac{-1}{2}$$

Estrategia

Una estrategia para calcular límites de sucesiones consiste en convertir el límite de la sucesión que tienes que calcular en un caso particular de un límite funcional.

Estrategia

Una estrategia para calcular límites de sucesiones consiste en convertir el límite de la sucesión que tienes que calcular en un caso particular de un límite funcional.

Según esta estrategia, para calcular el límite de una sucesión $\{y_n\}$ lo que hay que hacer es relacionar dicho límite con un límite funcional. Debemos inventarnos una función, f, y una sucesión $\{x_n\} \to a$, de forma que se tenga $y_n = f(x_n)$. Entonces, podemos asegurar que si $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, también es $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Técnicas para calcular límites de sucesiones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

Técnicas para calcular límites de sucesiones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un producto de varias sucesiones las que queramos por otras que sean asintóticamente equivalentes. Las siguientes equivalencias asintóticas se usan constantemente:

$$\begin{array}{ccccc} \{x_n\} \to 0 & \Longrightarrow & \ln(1+x_n) & \sim & x_n \\ \{x_n\} \to 0 & \Longrightarrow & e^{x_n} - 1 & \sim & x_n \\ \{x_n\} \to 1 & \Longrightarrow & \ln(x_n) & \sim & x_n - 1 \end{array}$$

Técnicas para calcular límites de sucesiones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un producto de varias sucesiones las que queramos por otras que sean asintóticamente equivalentes. Las siguientes equivalencias asintóticas se usan constantemente:

$$\begin{array}{ccccc} \{x_n\} \to 0 & \Longrightarrow & \ln(1+x_n) & \sim & x_n \\ \{x_n\} \to 0 & \Longrightarrow & e^{x_n} - 1 & \sim & x_n \\ \{x_n\} \to 1 & \Longrightarrow & \ln(x_n) & \sim & x_n - 1 \end{array}$$

- Los criterios de equivalencia logarítmica, de Stolz y de las medias aritmética y geométrica son muy útiles para calcular límites de sucesiones.

Técnicas para calcular límites de sucesiones

Las siguientes estrategias son útiles para calcular límites :

- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un producto de varias sucesiones las que queramos por otras que sean asintóticamente equivalentes. Las siguientes equivalencias asintóticas se usan constantemente:

$$\begin{array}{lccc} \{x_n\} \to 0 & \Longrightarrow & \ln(1+x_n) & \sim & x_n \\ \{x_n\} \to 0 & \Longrightarrow & e^{x_n} - 1 & \sim & x_n \\ \{x_n\} \to 1 & \Longrightarrow & \ln(x_n) & \sim & x_n - 1 \end{array}$$

- Los criterios de equivalencia logarítmica, de Stolz y de las medias aritmética y geométrica son muy útiles para calcular límites de sucesiones.
- Convierte el límite de la sucesión en un caso particular de un límite funcional.

Ejercicios

Ejercicio 1. Estudia el comportamiento de la sucesión $\left\{\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right\}$ donde P y Q son funciones polinómicas.

Ejercicio 2. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$ con $|a| < 1$. Calcula el límite de la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = n^k a^n$.

Ejercicio 3. Calcula los límites de las sucesiones:

a) $x_n = \dfrac{5^n + (-3)^n}{5^{n+2} + (-4)^{n+1}}$.

b) $y_n = \sqrt{n}\left(\sqrt[4]{4n^2+3} - \sqrt{2n}\right)$.

c) $z_n = \dfrac{n+1}{n^2+1} + \dfrac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n+n}{n^2+n}$.

d) $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0)$

Ejercicios

Calcula los límites de las sucesiones:

$$x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n}\right); \quad y_n = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n\log n}; \quad z_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$$

$$x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \ (\alpha > -1); \quad y_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n)}$$

$$x_n = \left(3\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}\right)^n; \quad x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$$